Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

Физикалық техникалық факультет
Жылуфизикасы және техникалық физика кафедрасы

13 ДӘРІС

Орнықтылық ұғымын тәжірибелік дифференциалдық теңдеулер үшін математикалық өрнегін қорыту. Шаблоннан түйіндерді таңдап алу.

Дәріскер: **А.К. Сариева, п.ғ.к., аға оқытушы**

Дәріс мақсаты: **модельдік теңдеу негізінде динамикалық және статикалық орнықсыздықты бейнелеу.**

Шаблоннан түйіндерді таңдап алу.

Алдағы уақытта біз келесі модельдік теңдеуді қолданатын боламыз:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Бұл теңдеудің таңдап алыну себебі – ол бастапқы функцияның уақыт бойынша локальді өзгерісін (теңдеудің сол жағындағы бірінші мүше), конвективті тасымалды (сол жақтағы екінші мүше) және молекулалық тасымалды (теңдеудің екінші бөлігіндегі мүше) ескереді.

- ✓ **Егер *f* жылдамдық υ болса, *a* коэффициенті ν кинематикалық тұтқырлыққа тең;**
- ✓ **Егер *f* *c* концентрацияға *a* коэффициенті *D* диффузия коэффициентіне тең болады;**
- ✓ **Егер *f* температура *T* болса *a* коэффициенті температуралық өткізгіштік коэффициенті болады.**

Соңғы жағдайда $f \equiv T$ болғанда (2.1) теңдеу бірөлшемді каналдағы сұйық тұрақты *u* жылдамдықпен қозғалған кездегі температура өзгерісінің бейстационар процесін сипаттайды.

Орнықтылық ұғымын тәжірибелік дифференциалдық теңдеулер үшін математикалық өрнегін қорыту. Шаблоннан түйіндерді таңдап алу.

(2.1) модельдік теңдеуін қарастырайық:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Уақыт бойынша алға айырымдары және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырымдары бар шекті-айырымды схема мынадай түрге ие:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}.$$

Ықшамды болу үшін әрі қарай u_i^n орнына қарапайым *u* жазамыз. Осы теңдеуді мынадай жолмен түрлендіріп жазайық:

$$f_i^{n+1} - f_i^n = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right). \qquad (3.4)$$

Келесі белгілеулерді енгізейік:

$C = \dfrac{u\Delta t}{\Delta x}$ **— Курант саны,**

$d = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ **— диффузиялық сан.**

Осыдан кейін (3.4) өрнек былайша жазылатын болады:

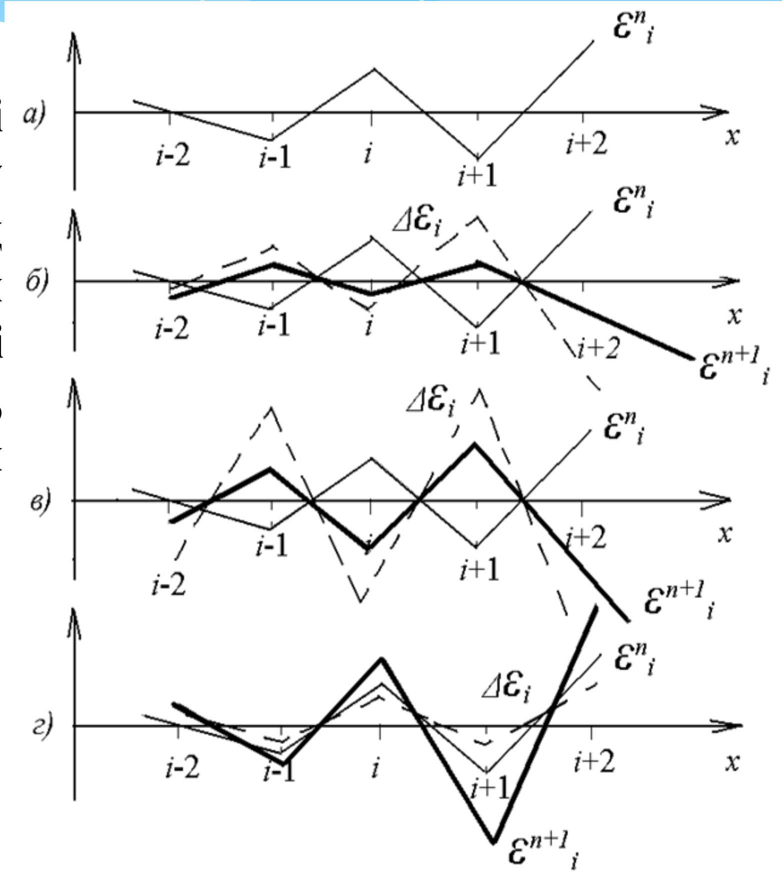
$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right).$$

(3.5)

***n*-ші қабатта уақыт бойынша 7, *а* суреттегідей ε_i^n кіші ауытқу пайда болды делік.**

ε_i^n шамасы нүктеден нүктеге дейін арта береді және көрші түйіндерде әр түрлі таңбаға ие болады. Мұндай ауытқулар жуықтау қателіктерінің салдарынан немесе нақты екіөлшемді есептегі көлденең қозғалыстың әсерінен туындауы мүмкін. *n*-ші қабатта пайда болған ауытқу міндетті түрде *(n+1)*-ші қабатта да байқалады. Егер келесі уақыттық қабаттардағы ауытқу абсолют мәні бойынша кемитін болса, онда шекті-айырымды схема орнықты болады. Осылайша, берілген жағдайда орнықтылық шарты келесі түрде болады:

$$\left|\varepsilon_i^{n+1}\right| \le \left|\varepsilon_i^n\right| \quad \text{немесе:} \quad \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| \le 1. \qquad (3.6)$$



7-сурет. Шекті-айырымды схемалар

Ауытқудың дамуын бақылап көрелік. Ол үшін (3.5) теңдеуді *n*-ші қабаттағы ауытқуларды ескере отырып жазайық:

$$f_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = f_i^{n} + \varepsilon_i^{n} - \frac{C}{2}\left[\left(f_{i+1}^{n} + \varepsilon_{i+1}^{n}\right) - \left(f_{i-1}^{n} + \varepsilon_{i-1}^{n}\right)\right] +$$
$$+ d\left[\left(f_{i+1}^{n} + \varepsilon_{i+1}^{n}\right) + \left(f_{i-1}^{n} + \varepsilon_{i-1}^{n}\right) - 2\left(f_{i}^{n} + \varepsilon_{i}^{n}\right)\right]$$

(3.7)

Ауытқулары бар (3.7) теңдеуден «айнымаған» (3.5) өрнекті шегеріп тастаймыз:

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^{n} - \frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^{n} - \varepsilon_{i-1}^{n}\right) + d\left(\varepsilon_{i+1}^{n} + \varepsilon_{i-1}^{n} - 2\varepsilon_i^{n}\right).$$

Осы жерден *(n+1)*-ші қабаттағы ауытқудың өсімшесін анықтайық:

$$\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^{n} = -\frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^{n} - \varepsilon_{i-1}^{n}\right) + d\left(\varepsilon_{i+1}^{n} + \varepsilon_{i-1}^{n} - 2\varepsilon_i^{n}\right). \qquad \textbf{(3.8)}$$

Осы теңдеуді бір ғана диффузиялық мүшесімен қарастыралық, яғни *C=0* деп санаймыз:

$$\Delta\varepsilon_i = d\left(\varepsilon_{i+1}^{n} + \varepsilon_{i-1}^{n} - 2\varepsilon_i^{n}\right). \qquad \textbf{(3.9)}$$

Бұл теңдеуді *i* нүктесінде талдаймыз:

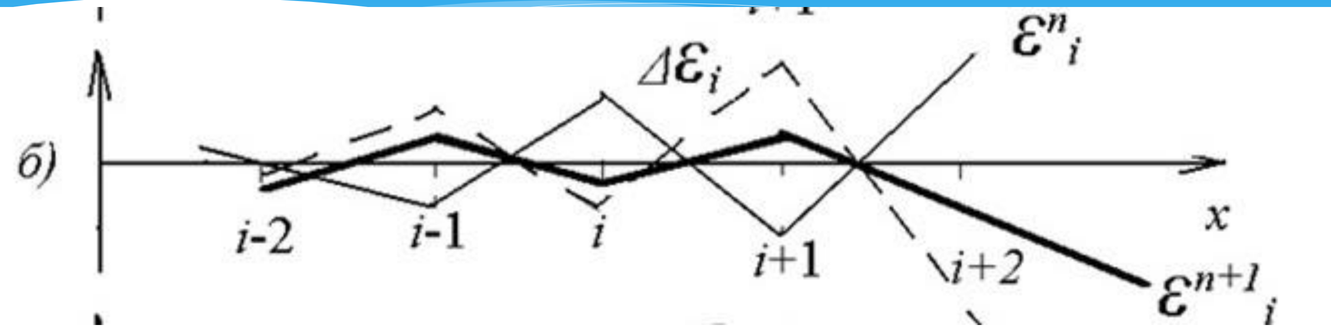
$$\Delta\varepsilon_i = d\left(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n\right) > 0,$$

өйткені, $\varepsilon^n{}_{i+1}>0$, $\varepsilon^n{}_{i-1}>0$, $\varepsilon_i^n<0$. Сәйкесінше, $\Delta\varepsilon_i>0$ және бұл шама *i* нүктесіндегі теріс ауытқуды түзетуге ұмтылады. Осыған ұқсас, $\Delta\varepsilon_{i+1}$ қарастыра отырып, мынаны аламыз:

$$\Delta\varepsilon_{i+1} = d\left(\varepsilon_{i+2}^n + \varepsilon_i^n - 2\varepsilon_{+1i}^n\right) < 0,$$

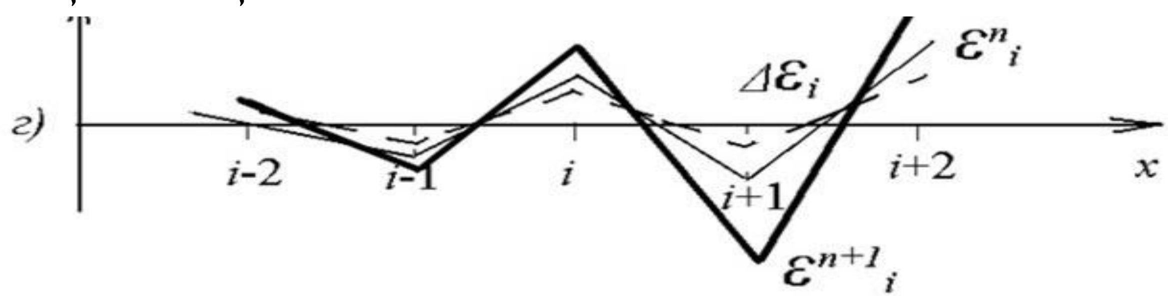
өйткені, $\varepsilon^n{}_{i+2}<0$, $\varepsilon^n{}_i<0$, $\varepsilon^n{}_{i+1}>0$, яғни, $\varepsilon^n{}_{i+1}$ оң ауытқуы $\Delta\varepsilon_{i+1}$ теріс өсімшесімен түзетіледі. Осылайша, $(n+1)$-ші қабаттағы (7, *б*-суреттегі үзік сызық) ауытқудың өсімшесі қандай болатындығын бейнелеуге болады. ε_i^n мен $\Delta\varepsilon_i$ шамаларын графикалық тәсілмен қосу арқылы $n+1$-ші қабаттағы ауытқудың түрін анықтаймыз (5, *б*-суреттегі қалың сызық):

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \Delta\varepsilon_i.$$



7, *б*-суреттен көрініп тұрғандай, берілген жағдайда (3.6) орнықтылық шарты орындалады және *(3.9) шекті-айырымды теңдеуі орнықты.* Алайда, егер Δt қадамы айтарлықтай үлкен болса, онда $\Delta\varepsilon_{i+1}$ өсімшесінің есебінен енгізілетін түзету де едәуір үлкен болады. Осындай өте үлкен Δt үшін ε_i^{n+1} жаңа мәні бастапқы ауытқудан ε_i^n көп болады, мұны 7, *в*-суреттен көруге болады.

Уақыт бойынша қадамның айтарлықтай үлкен болуының әсерінен туындайтын амплитудасы өспелі мұндай осцилляциялардың пайда болуы динамикалық орнықсыздық деп аталады.



Динамикалық орнықсыздықтан уақыт бойынша қадамға Δt шектеу қою арқылы құтылуға болады.

Енді (3.8) теңдеуін бір ғана конвективті мүшесімен қарастыралық, яғни **d=0** *деп есептейміз.* Онда (3.8) теңдеуі бұл кезде мынадай түрге енеді:

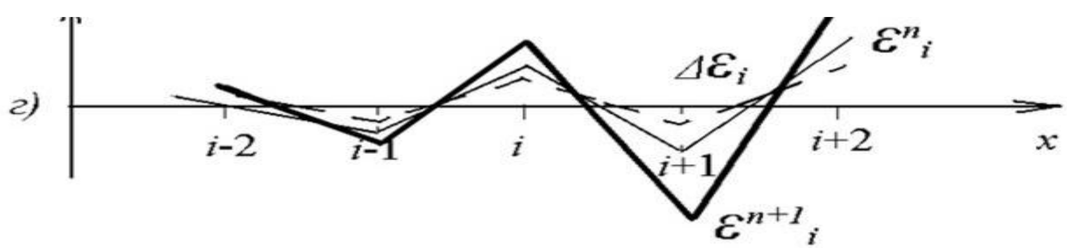
$$\Delta\varepsilon_i = -\frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n\right). \qquad (3.10)$$

u>0 болсын, яғни *C>0*. *i* нүктесіндегі ауытқудың өсімшесі мынадай болады:

$$\Delta\varepsilon_i = -\frac{C}{2}\left(\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n\right) < 0,$$

өйткені, $\varepsilon^n_{i+1}>0$, $\varepsilon^n_{i-1}>0$, бірақ, ε амплитуда *i* артқан сайын артады, яғни $\varepsilon^n_{i+1}>\varepsilon^n_{i-1}$, сәйкесінше, жақша ішіндегі өрнек оң болады. Осылайша, конвекцияға негізделген $\Delta\varepsilon_i$ өсімшесі ε_i^n ауытқуын күшейтеді. Бұл қателіктің монотонды артатындығын білдіреді (7, *г*-сурет).

Мұндай өспелі қателіктің пайда болуы статикалық орнықсыздық деп атайды, оны уақыт бойынша қадамды кеміту арқылы жою мүмкін емес. Одан қандай да бір басқа шекті-айырымды схемаға ауысу арқылы құтылуға болады.



$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right)$$

Осылайша, (3.5) теңдеу *C=0* болғанда шартты орнықты болса, *d=0* болғанда абсолютті орнықсыз болады. Егер бірмезгілде *C≠0* және *d≠0* болса, онда конвективті және диффузиялық мүшелер бір-бірімен әсерлесіп, жалпы алғанда (3.5) теңдеу орнықты да, орнықсыз да болуы мүмкін.

Бақылау сұрақтары

- **Модельдік теңдеудің қолданысын түсіндіріңіз.**
- **Орнықтылық ұғымының мәнісі неде?**
- **Тәжірибелік дифференциалдық теңдеулерді келтіріңіз.**
- **Курант санының мәнісі неде?**
- **Шаблоннан түйіндерді таңдауды түсіндіріңіз.**

ӘДЕБИЕТ

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - Спб.: Лань, 2009 - 672 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - Спб.: Лань, 2009 - 400с.
3. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М., Физматлит, 2011-364 с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учебное пособие для вузов. М.: Высшая Школа, 2002 - 153 с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы. Учебное пособие для вузов. М.: Дрофа, 2013 - 221 с.
6. Костомаров Д. П. Вводные лекции по численным методам. Москва: Логос, 2006 .- 184 с.
7. Волков Е. А. Численные методы. - Санкт-Петербург: Лань, 2009 .-256 с.
8. Исаков В. Н.Элементы численных методов : -Москва: Академия, 2012 .-192 с
9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad. Спб.: Лань, 2008 – 352 с.
10. Болегенова С.А. Численные методы теплофизики: учебное пособие. – Алматы: «Қазақ университеті», 2007. – 100 с.

Интернет-ресурстар:
1. *https://dxdy.ru ›*
2. *window.edu.ru*
3. *https://books.google.kz › book*